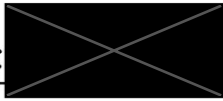


科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID:



氏名: 小林優太

提出日: 2021年08月21日(土)

講座名: ひもの系結び方の研究

No.1

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

重力機

この講座を受けようと思ったきっかけは、ひもの系結び方(系結び目)が数学とどのように関連しているのを知りたかったからです。

言われた内容 調べた内容は以下の3点です

- ① 自分で作った系結び目の影に、何通りの系結び目、何種類かの系結び目がかかっているか調べました。
- ② 偶数個の交点を持つ系結び目において、なぜ、キレイな系結び目が出来ないのか調べました。
- ③ 交点の数が3の倍数以外の三彩色数はいつても「る、かどうか」も調べました。

実馬矢 ① 好きな系結び目の影には何通り何種類の系結び目の図が作れるか。

ひもの系結び方を系結び目とします。しかし数学的な系結び目は、ほじけなように端をつなげて車輪にしたものをします。

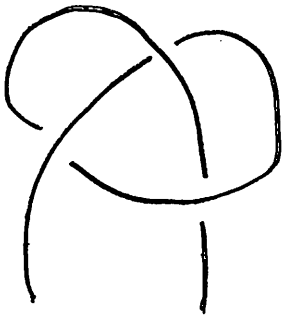
科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日 ()

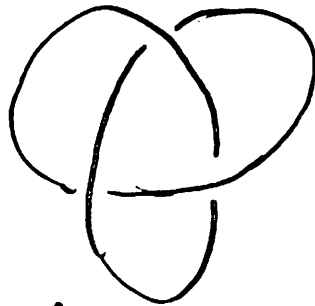
講座名: _____

NO.2

・講座で学んだこと、感想等を記入してください



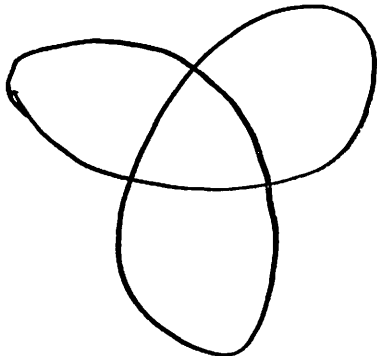
↑ 結び目の図



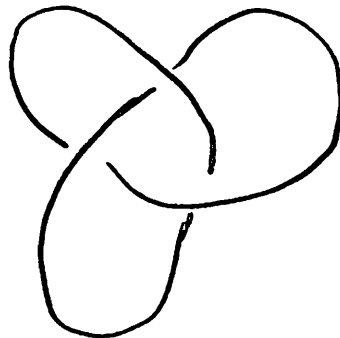
↑ 数学的な結び目の図

<図1> 結び目の図と数学的な結び目の図

また、結び目の図には2種類異なる絵があります。「結び目の影」と「結び目の図」でも、結び目の影だけでは上下が分かれません。



↑ 結び目の影



↑ 結び目の図

<図2> 結び目の影と結び目の図

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

No.3

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

実験①では、自分で描いた結び目の影は何通りの結び目の図が出来、何種類目の結び目が出来るとも調べます。

講義で、結び目の影から作れる結び目の図の総数は、その結び目の影の交点を n とおくと、

$$2^n \quad \dots \text{式1}$$

で表されること知りました。これは、ひもの上下が2通りあって、それを積の法則から、交点の数だけ累乗する、という原理です。

<実験の手順> 実験は、以下の流れで進めました。

- ① まず自分で好きな結び目の影を描く。
- ② 次に、その交点を数え、それを n として式1に代入し、結び目の図の総数を求める。
- ③ それを表にし、それを見ながら、その結び目の影から作れる結び目の図を全て描く。
- ④ 全て描いた結び目の図から、実際にひもで作れる結び目の図の種類の数も調べる。

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

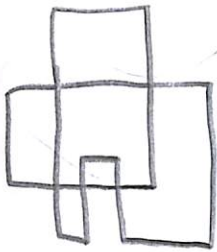
講座名: _____

NO.4

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

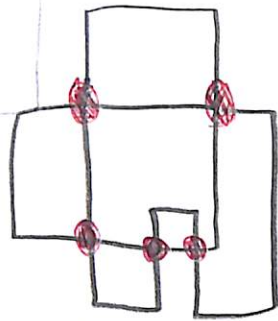
<結果>

- ① 自分で好きな結び目の影を描く。
僕は、この結び目の影を描いて言周へました。



<図3> 自分が言周へた結び目の影

- ② 交点の数から、結び目の図の総数を求める。



交点の個数
<図4> 交点の個数 - 5個

これを式1に代入して、

$$2^5 = 32$$

式2

よって、結び目の図の総数は、
32通り

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日 ()

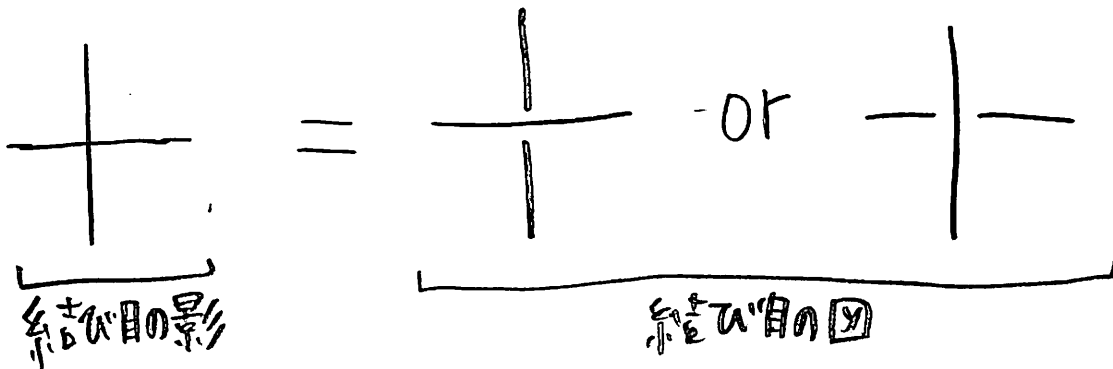
講座名: _____

NO.5

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

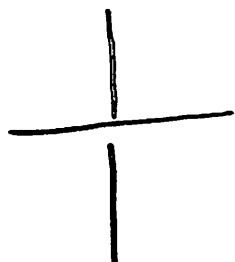
① ②で求めた総数を元に表に記入を見ながら考えられる結び目の図を全て描く。

1つの交点には2本の線が交わっています。つまりどちらかが"上"で、どちらかが"下"となっているのです。



<図5> 交点の可能性

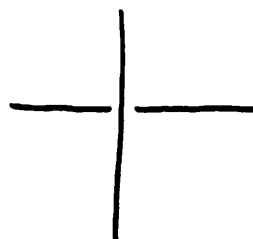
ここでは、^{のせん}系縦線目線 縦線目線 で表も作ります。



...系縦線目線と、



<図6> 縦線目線の表し方



...縦線目線と、

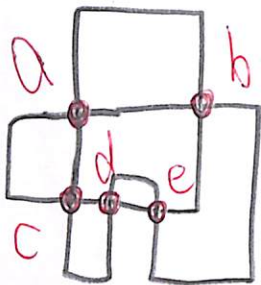


科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

NO.6
! 講座で学んだこと、感想等を記入してください



それぞれの交点を a, b, c, d, e, とします。

<表1> 図3の字が1目の総数の表(縦線時線)

	a	b	c	d	e
①	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖
②	⊖	⊖	⊖	⊖	⊕
③	⊖	⊖	⊖	⊕	⊖
④	⊖	⊖	⊖	⊕	⊕
⑤	⊖	⊖	⊕	⊖	⊖
⑥	⊖	⊖	⊕	⊖	⊕
⑦	⊖	⊖	⊕	⊕	⊖
⑧	⊖	⊖	⊕	⊕	⊕
⑨	⊖	⊕	⊖	⊖	⊖
⑩	⊖	⊕	⊖	⊖	⊕
⑪	⊖	⊕	⊖	⊕	⊖
⑫	⊖	⊕	⊖	⊕	⊕

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

NO.7

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

	a	b	c	d	e
13	下	上	上	下	下
14	下	上	上	下	上
15	下	上	上	上	下
16	下	上	上	上	上
17	上	下	下	下	下
18	上	下	下	下	上
19	上	下	下	上	下
20	上	下	下	上	上
21	上	下	上	下	下
22	上	下	上	下	上
23	上	下	上	上	下
24	上	下	上	上	上
25	上	上	下	下	下

	a	b	c	d	e
26	上	上	下	下	上
27	上	上	下	上	下
28	上	上	下	上	上
29	上	上	上	下	下
30	上	上	上	下	上
31	上	上	上	上	下
32	上	上	上	上	上

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

NO.8

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

先の「表1」を元に、全ての糸通し目の図を描きまわす。なお、「表1」の番号は、この番号と対応しています。

<p>①</p> <p>〰〰〰 01</p>	<p>②</p> <p>〰〰〰 01</p>	<p>③</p> <p>〰〰〰 31 の金鏡像</p>
<p>④</p> <p>〰〰〰 01</p>	<p>⑤</p> <p>〰〰〰 01</p>	<p>⑥</p> <p>〰〰〰 31</p>
<p>⑦</p> <p>〰〰〰 01</p>	<p>⑧</p> <p>〰〰〰 01</p>	<p>⑨</p> <p>〰〰〰 01</p>
<p>⑩</p> <p>〰〰〰 31</p>	<p>⑪</p> <p>〰〰〰 01</p>	<p>⑫</p> <p>〰〰〰 01</p>

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

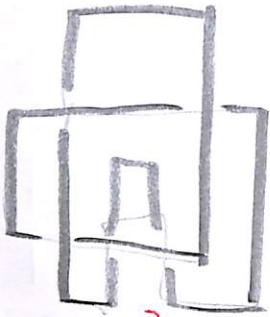
受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

No.9

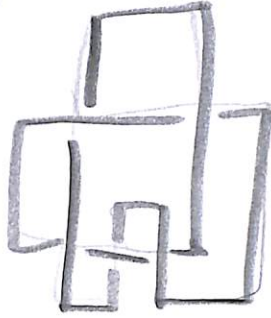
・講座で学んだこと、感想等を記入してください

13



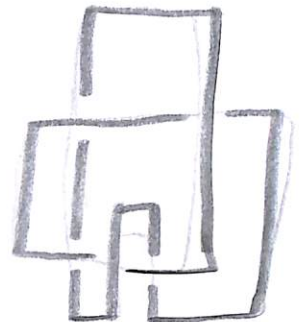
...31

14



...51

15



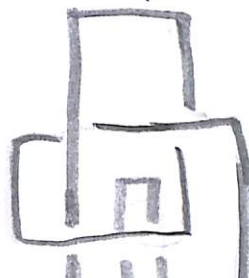
...01

16



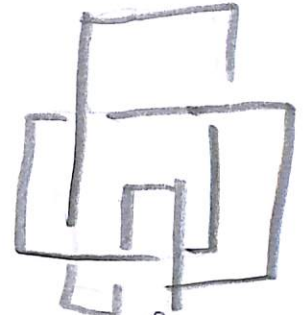
...31

17



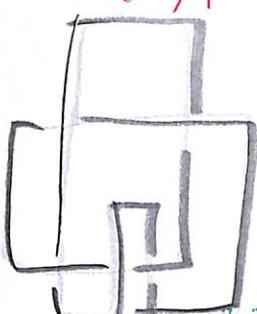
...31の鏡像

18



...01

19



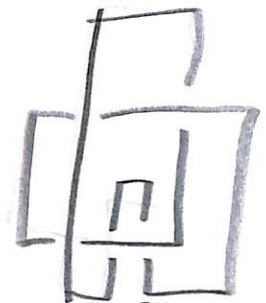
...51の鏡像

20



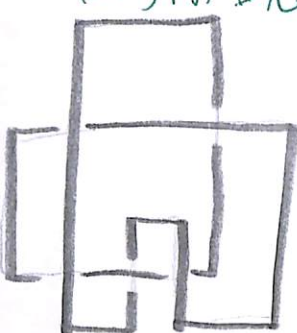
...31の鏡像

21



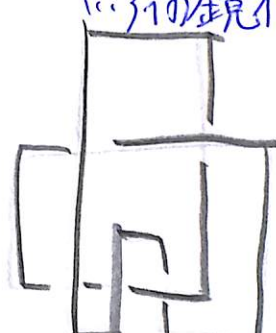
...01

22



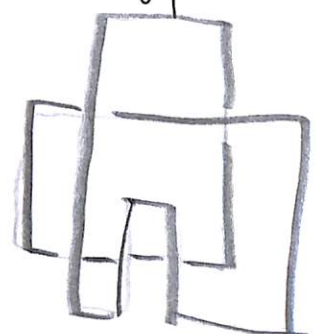
...01

23



...31の鏡像

24



...01

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

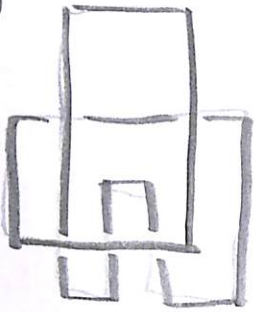
受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

NO.10

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

25



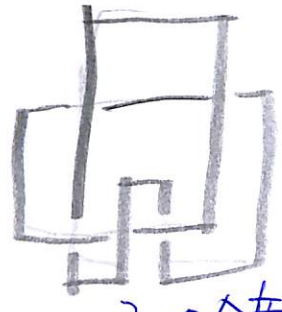
...01

26



...01

27



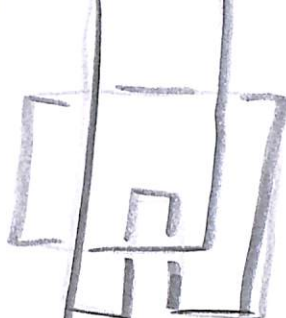
...31の鏡像

28



...01

29



...01

30



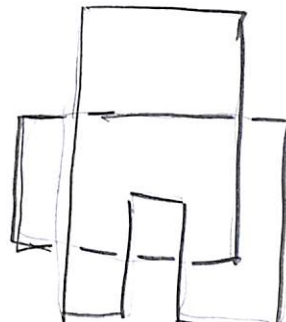
...31

31



...01

32



...01

<図 7> <図 32>の糸が「目の影」から作れる全ての糸が「目の図」

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

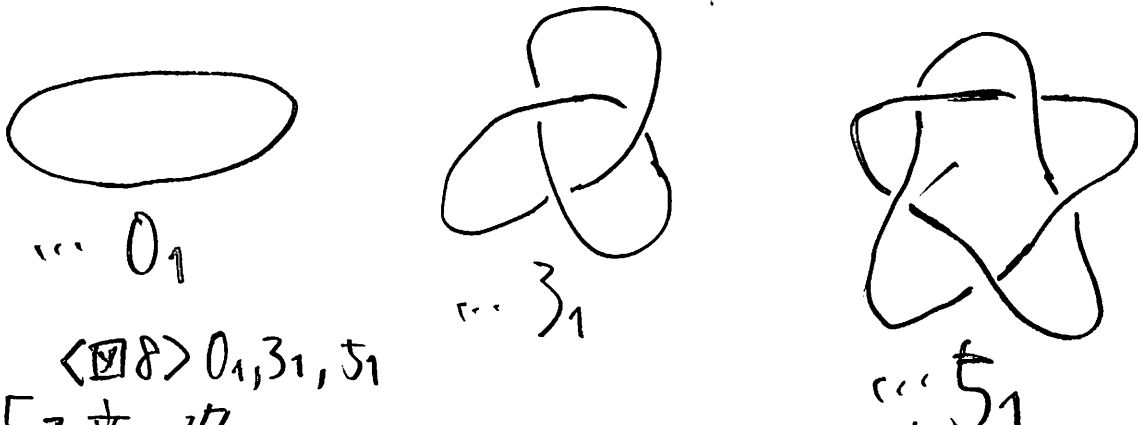
受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

NO.11

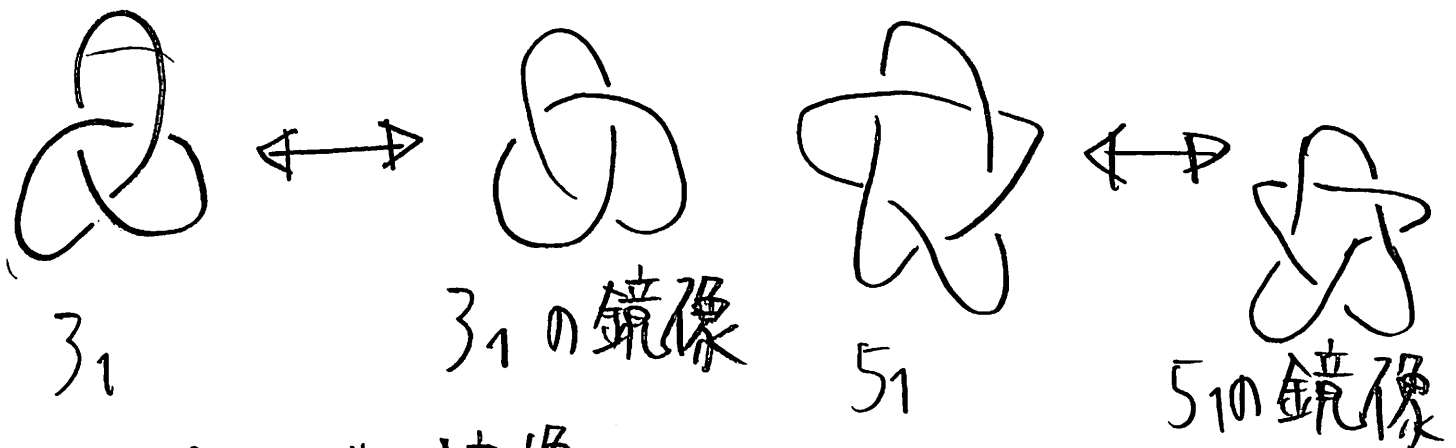
・講座で学んだこと、感想等を記入してください

それぞれの図の下に書かれているものは、その上の結び目の図を变形してとどのつまり何になるかを表すものです。



〈図8〉 $0_1, 3_1, 5_1$

また、「鏡像」とは、その元の結び目を鏡に写した図、つまり、元の図の交点の上下も全て逆にした図のことです。元の結び目の図と鏡像は違うことが知られてはいます(補足: 4_1 (5) の鏡像と元の図は同じです)



〈図9〉 それぞれの鏡像

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

NO.12

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

これらのことをふまえて、実際にはひもで作り(USBケーブルがおすすめ)、ケル-7°分けしたのが以下です

01 ... 20個 ①, ②, ④, ⑤, ⑦, ⑧, ⑨, ⑪, ⑫, ⑮, ⑰, ⑳, ㉑, ㉒, ㉓, ㉔, ㉕, ㉖, ㉗, ㉘	31 ... 5個 ⑥, ⑩, ⑬, ⑯, ㉚	31の鏡像 ... 5個 ③, ⑭, ㉙, ㉛, ㉜
	51 ... 1個 ⑭	51の鏡像 ... 1個 ⑩

<図10> 結び目の種類

<考察>

この様な結果から、<図3>の結び目の影は、32通りの結び目の図を含んでおり、01, 31, 31の鏡像, 51, 51の鏡の5種類があると考えられます。

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____年 月 日()

講座名: _____

NO.13

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

<気づいたこと>

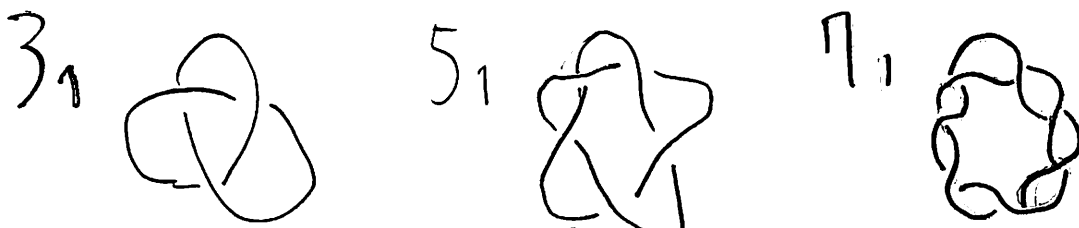
・(表1)で、④も1と見立てて二進数で進めていたのですが、二進数の位を求めるときに式 2^n が「結び目の影から結び目の図を求め 2^n と一致していたので、最後の④に、④, ④, ④, ④, ④と、それぞれ終わること気が付きました。

・実馬舎 ② なぜ偶数個の交点を持つキレイな形をしている結び目はないのか。

結び目は1本のひもで講成されていますが、2本のひもで講成された、「結び目」というものがあります。

僕はなぜ偶数個の交点を持つ「キレイ」な形の結び目はないのか気になって調べようと思いましたが(奇数個の交点を持つキレイな形をした結び目はあります)。

なお、「キレイ」とは奇数個の交点を持つ結び目において、一番最初(右下の数が1)にくる結び目のことです。



<図11> キレイな結び目

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: 氏名: 提出日: 年 月 日()

講座名:

NO.14

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

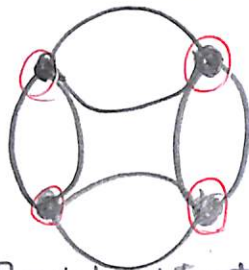
<実験手順> 次の手順で実験せよ

① 試行作図して説明する。

<結果>

[説明]

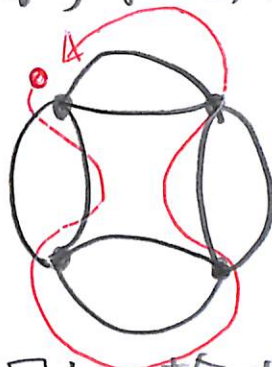
もし偶数個 (ここでは4個) の交点の数を持つ
キレイな結び目があったら、その結び目の影は以下のように
表されます。



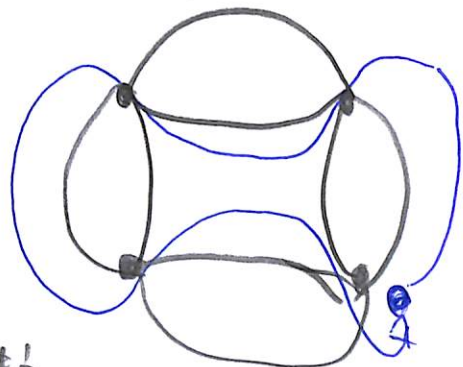
交点...4個

<図12> 偶数個の交点を持つキレイな結び目の影

これをキレイな結び目の図にするには交点の内と外に交
差させなければならぬので、そうすると、



<図13> 車輪になる



科学者の芽育成プログラム 受講レポート

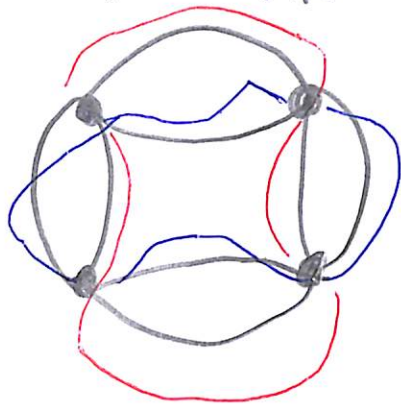
受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

No.15

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

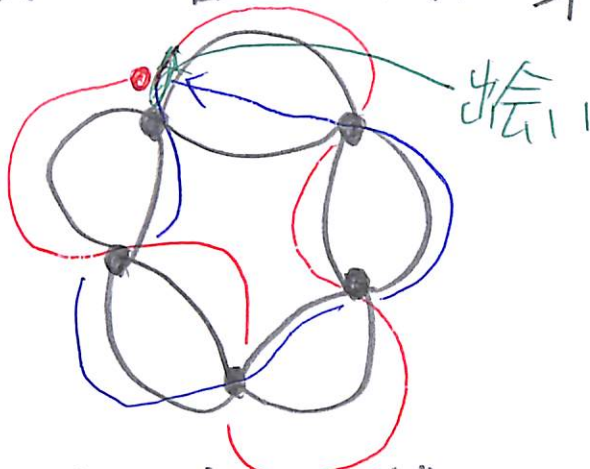
この時点で1つの輪が出来てはいます。



<図14> 二つの輪が出来

つぱい二つの輪が出来、絡み目になってしまうのです。

一方、奇数個の交点の個数を持つ系は、偶数個でいう、一つ目と二つ目の輪が出会います。



<図15> 奇数個の説明

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID:

氏名:


提出日:

年 月 日()

講座名:

No.16

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

この「出会い」は最初外にあったスタート地点
($\langle \square \rangle$ の \bullet) に合わせてゴール地点 ($\langle \square \rangle$)
の「 \rightarrow 」が外に到達おかげです。ここで「ゴールせず、もう
一度ループ」() しようとする、

もう一つ交点を作ると外に出なければならぬので、また
奇数個の交点を持ったキレイな結び目を作ることに
なります。また、奇数を偶数にするにはもう一つ交点を作らなければ
行けないが、それは不可能です。

<考察>

この結果から、キレイな結び目を作るには交点が奇数個
なくてはならない、と考えられます。また、偶数個の交点を持つ
キレイな結び目は、存在しないと考えられます。

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

NO.16

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

○ 実馬兎 ③ 交点の数が3の倍数以外の三彩色数は
 1つ「3」なのではないか。

三彩色数とは、結び目の図を色分けしたときに
 作れる総数のことであつた。三つのルールがあります。

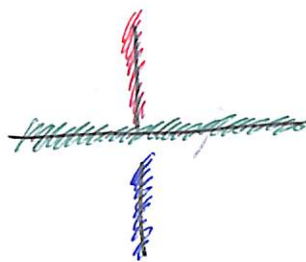
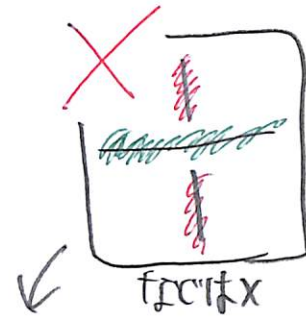
ルール①

3色または、
 同じ色を使う。



ルール②

・交点において、
 全て異なる色か、
 全て同じ色をぬる。

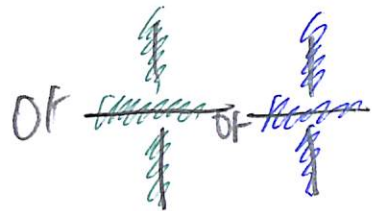


全て異なる色

or



全て同じ色



<図16> 三彩色数の二つのルール

科学者の芽育成プログラム 受講レポート

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

No. 17

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

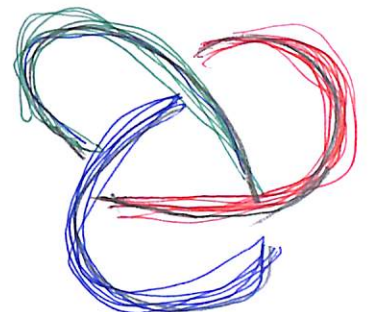
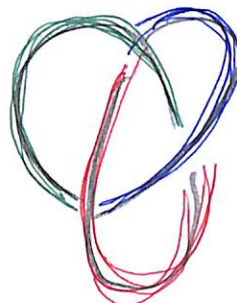
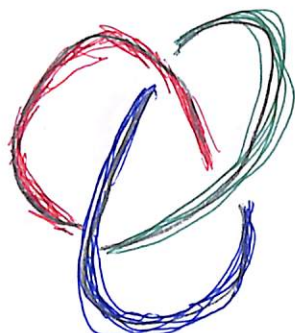
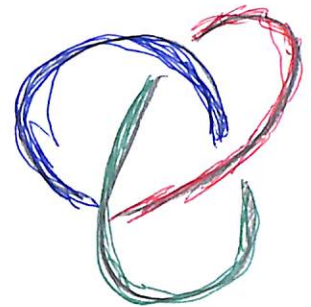
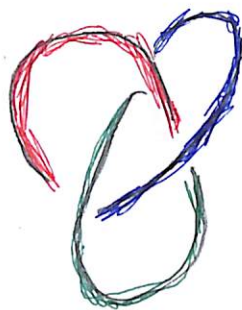
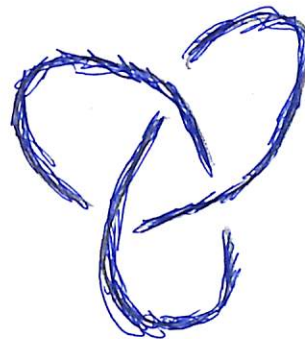
これらのルールもふまえて、試しに 3_1 もぬってみます。

(ex)



3_1

⇒



よって、 3_1 の
三彩色数は、

9 です。

<例17> 3_1 の三彩色数を求めよ。

受講生 ID: _____ 氏名: _____ 提出日: _____ 年 月 日()

講座名: _____

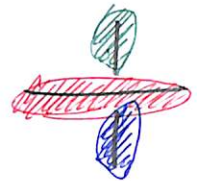
NO.18

・講座で学んだこと、感想等を記入してください

僕は、この講義で、 4_1 の三彩色数は「3」しか
ないことも知りました。これに疑問を持ち、交点の数が3の倍
数以外の三彩色数は3しかないのではないかと予想
しました。

< 実験手順 > 実験は、次の手順で行いました。

- ① $3_1, 4_1, 5_1, 6_1$ のそれぞれの交点に全てが異なる色をぬるやり方が通りでもあふか調べる。
- ② ①から、法則を説明する。



のようなぬりかた
= 10

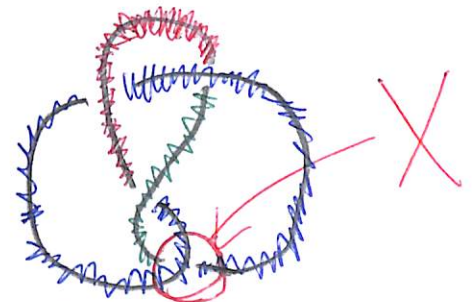
< 結果 >

① 3_1



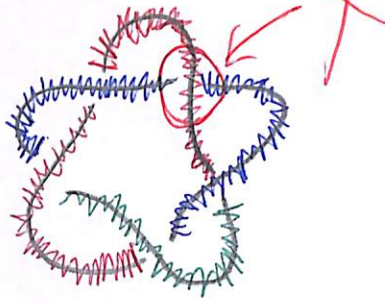
∴ 三彩色数は3より多い。

② 4_1



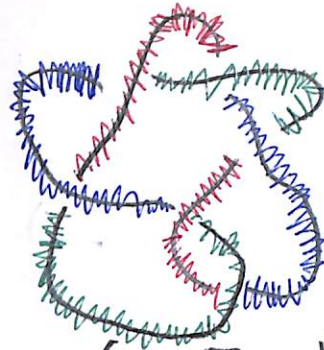
∴ 三彩色数は3。

0 51



∴ 三彩色数は3。

0 61



∴ 三彩色数は、
3より大きい。

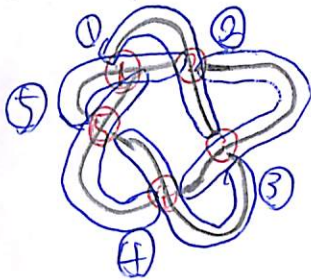
※ 「3」は、全て同じ色をぬったときの数。

<図18> それぞれの三彩色数

⑥ [言兌明]

④から、予想通り、交点か3の倍数個あると、三彩色数は3より大きくなることが考えられます。

それは、交点の数と、同じ色がぬれる区間の個数が、結び目の図では一致します。



… 交点の数 5個

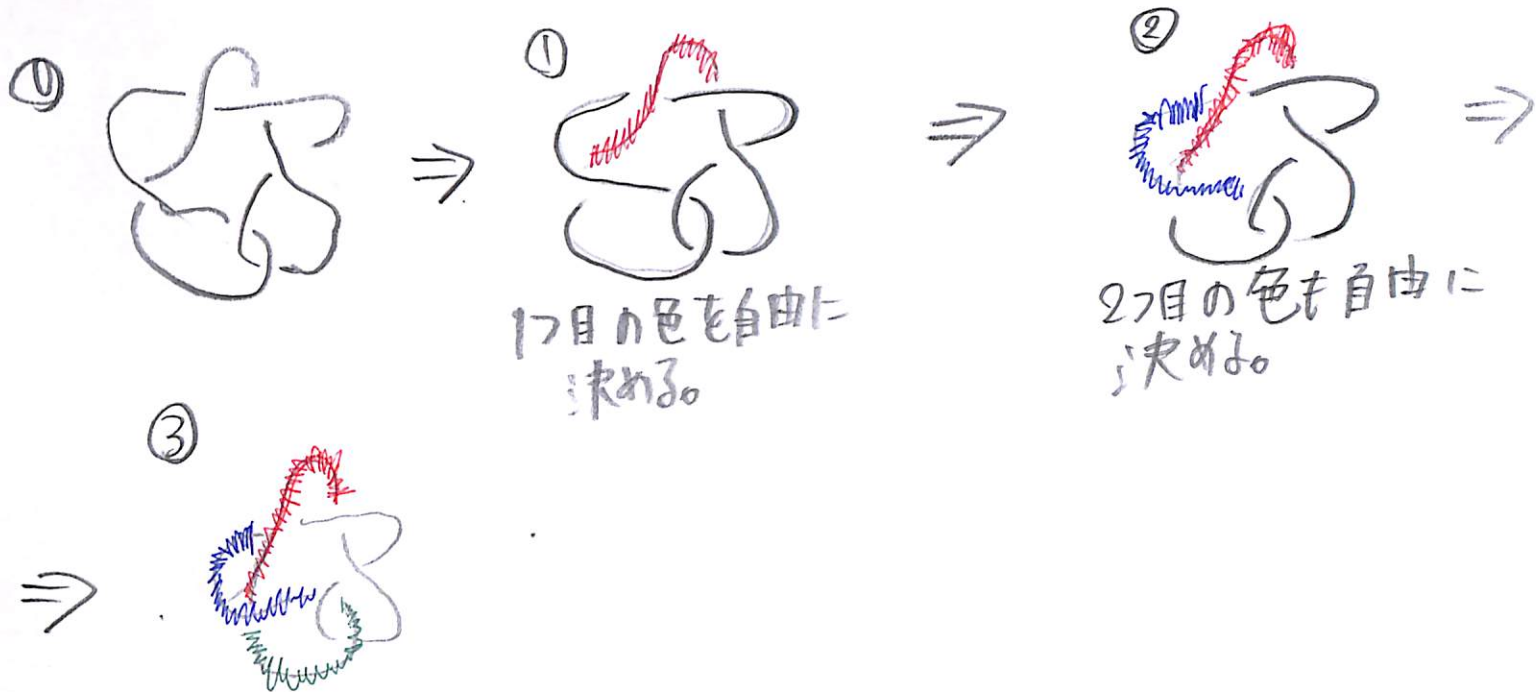
… 同じ色がぬれる区間の個数

… 5個

<図19> 交点と区間の関係

つまり、交点の個数が3の倍数だと、同じ色がぬれる区間の個数も3の倍数になるのです。

そして、三彩色数は1つ色を決めてから、
 目の色を自由に決め、残りの色ぬって行くことで、成り
 立たせることが出来ます



1つ目の色を自由に
 決める

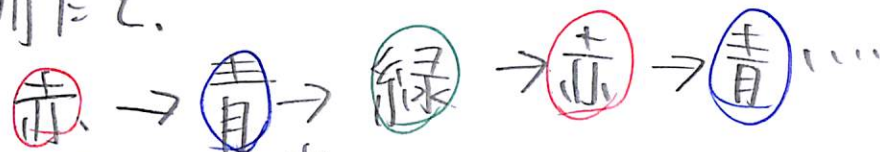
2つ目の色も自由に
 決めよう

三つ目の色は、
 ①, ②の課程をふまえて
 自動的に決まる。

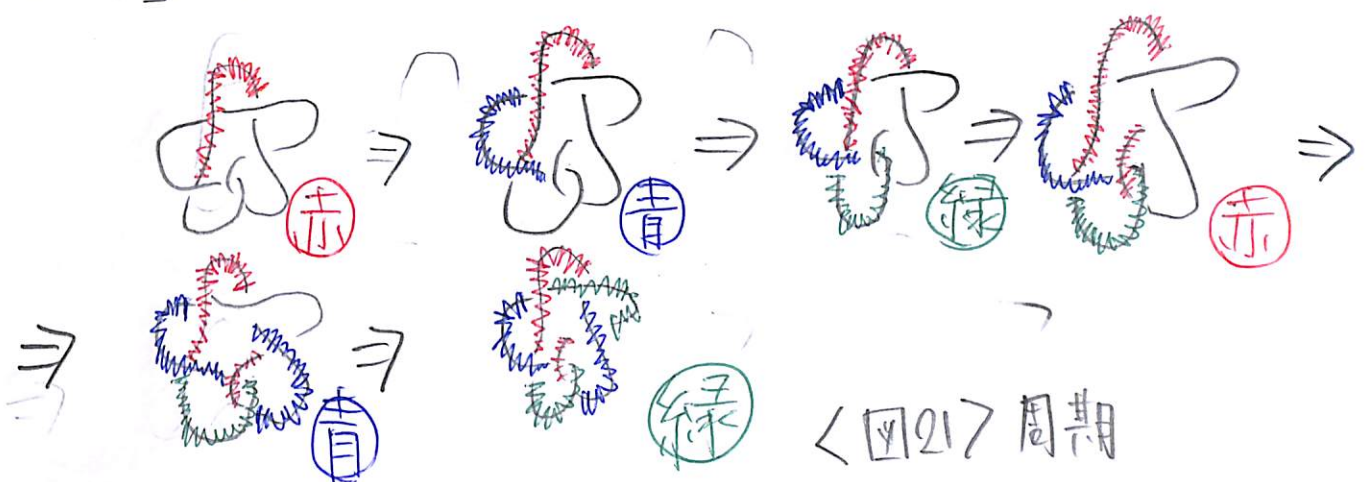
<図20> 全く違う色をぬるときの手順

ここでのポイントは、「周期」になっていることであらう例えは、

<図20>の例だと、



と「周期」が形成されています。



<図21> 周期

また、〈図 21〉だと、赤で始まって緑で終わります。すなわち、周期をくり返して元の位置に戻すために、始めた色の前の色（ここでは緑）に戻して置かなければ、全て異なる色での三彩色数はありません。三つの色を判良く最後の色で終わらせられる。言い換えると、三の倍数個の同じ色がぬれる区間を持った系譜目（三彩色数が3より大きくなります。同じ色がぬれる区間は交点の個数と等しいので）（〈図 19〉）またぬれる三の倍数個の交点の個数を持った系譜目以外三の倍数個の交点の個数を持つ系譜目の三彩色数は「3」ということになり

ます。



×何個か
↳成り立つ

1セットとします。

↳ これもくり返すと、例えば
赤で始まる、緑で必ず
終わるので、全て異なる色でぬれる系譜目は、
3の倍数個の交点を持つ系譜目となります。

〈図 22〉 3の倍数

〈考察〉

3の倍数個の交点を持つ系譜目の三彩色数は3より大きい（3は含まない）という結果から、

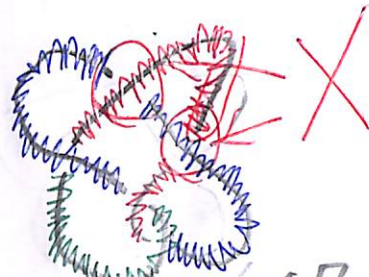
①の数が3の倍数ではない結晶目(例えば4₁, 5₁, 7₁など)の三彩色数は、それぞれ交点に全て同じ色をぬる、3しかないと考えられます。また、右下の小さい数が1のときしかやっていないので、5₂, 6₂, 7₂はどうなるか気になります。

<オマケ実験>

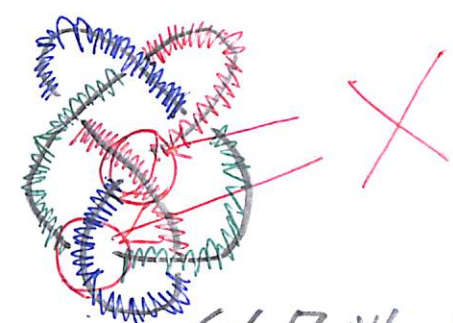
5₂, 6₂, 6₃ の場合の三彩色数

5₂ " (予想) 3

6₂ " (予想) 3以上



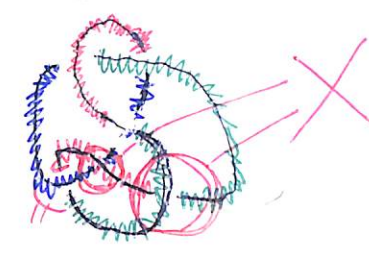
" 5₂ の三彩色数は
3



" 6₂ の三彩色数は
3

よって
" 僕が考えた法則のようになるのは、①でしか成り立たないと考えられます。

6₃ " (予想) 3



その理由は、①の時にはなかった、「X」があるからと考えます。6₂ は真ん中の「X」がダマになっていて、6₃ では中央は大丈夫ですが、左下の「X」がダマになっています。

" 6₃ の三彩色数は
3

まとめ


実験①

・自分が適当に描いた結び目の影には、交点、5個あり、結び目の図は32通り、種類は5種類あり
↳ 〈図3〉 ↳ 〈図7〉 ↳ 〈図10〉

実験②

・交点の個数が偶数個かつキレイな結び目はこの世に存在しなく、奇数個の場合はあることが分かりました。

実験③

・交点の個数が3の倍数の時には三彩色漸化式も考えられると分かりました。しかし、これは  1 と右下に 1 がつくものだけに当てはまるということが分かりました。

感想

今回のレポートも作成するに当たって、「重要なことか」と気付いたのは、何かをやりたいな、思った時には迷わずそれを実行した方がよい、ということです。特に、実験③のわけ実験がそうです。私はレポートも書いてる時だけに思いつきました。やっておりたおかげで、僕の法則のようなものは特定のものに当てはまることだけ知りました。

参考文獻

- ① www.hitath.saitama-u.ac.jp/kshimoka/tmp/2021/3.pdf
- ② www.hitath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/kshimoka/tmp/2021/KnotZoo.png
- ③ <https://www.mitar.saitama-u.ac.jp/wp-content/uploads/ethics210807a.pdf>
- ④ <https://www.mitar.saitama-u.ac.jp/wp-content/uploads/rep-exp.pdf>