円周率π について

日進北小学校・6年・角田 苺香

1.学んだこと

円周率の求め方について学んだので自分でもやってみることにした。求め方はアルキメデスの方法でやった。

アルキメデスは 円に内接する正多角形の辺の長さを計算して、円周の長さを2つの値の間に挟み込むやり方をした。

正三角形の内角は60°。一辺がrの正三角形6個を1点の周りに並べるとピッタリ収まって出来ない。ここにできた正六角形は半径rの円に内接している。正六角形の周の長さは6rになる。円周の長さをCと書くと、6r<C…(1)という不等式が成り立つ。円の直径をDと、D=2r。円周率はπ=C/Dと定義されたから。(1)式をDで割ると、6r/D<C/Dだが、左辺は6r/2r=3。一方右辺はC/D=π。すなわち3/π…(2)という式が証明された。

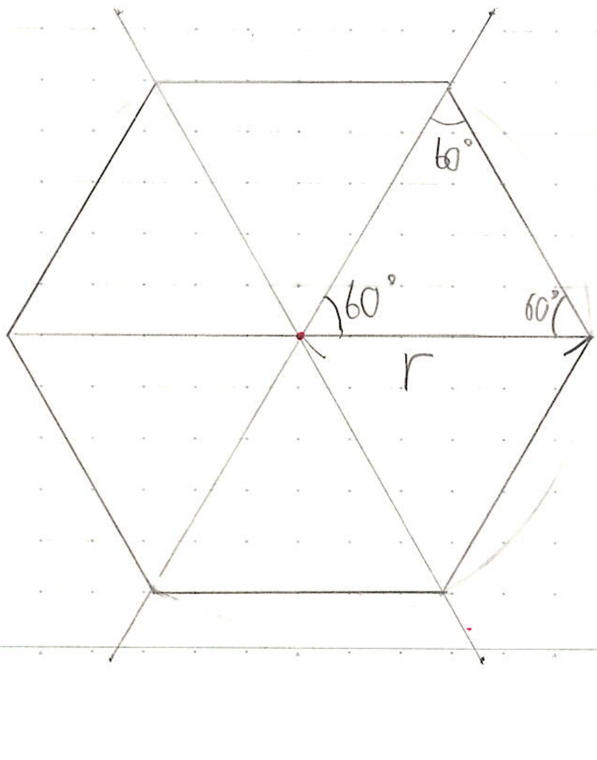

図1
円に内接する
六角形

アルキメデスは次に今の中心点を中心として正六角形を少し大きくして今の円の外側に接するものを考えた。これを外接する正六角形と言う。円に外接する正六角形の周の長さをGと書くとC＜G…(3)だと見抜いて、これをDで割り、C/D＝π＜G/D…(4)という式を導き出した。

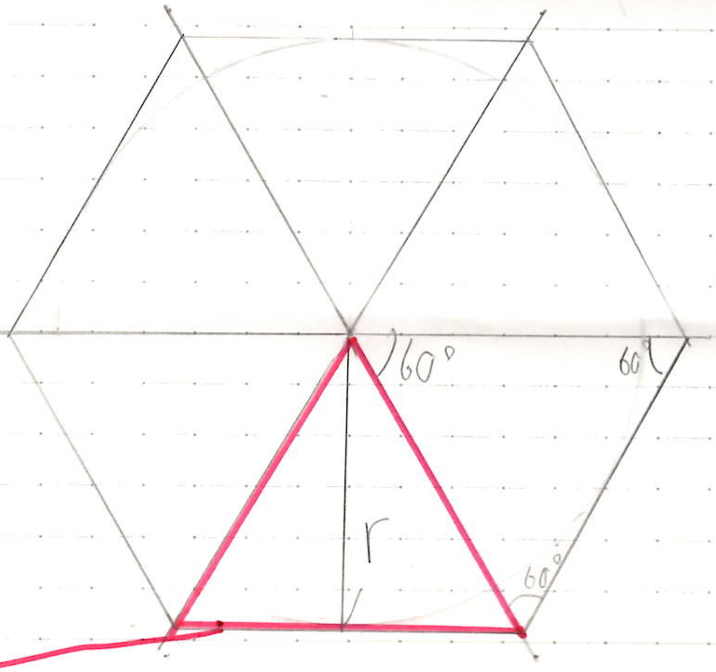

図2
円に外接する
六角形

外接する六角形の外周をGとする。六角形を6等分すると、正三角形となり、高さが半径rとなる

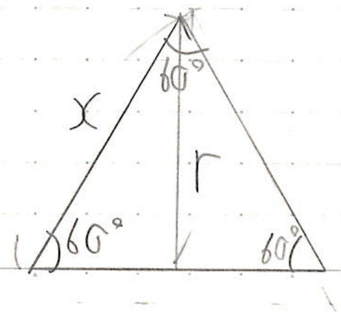

図3
外接する六角形を6等分した正三角形

NO
DATE

半径rを用いて図3のxを求める。このとき、外周G＝6xとなる。xを求めるには、ピタゴラスの定理を使う。ピタゴラスの定理では、図4のような90°、60°、30°の直角三角形では、1：2：√3となる。

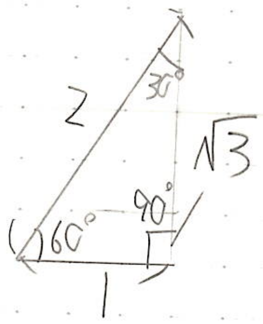

図4 90°、60°、30°の直角三角形

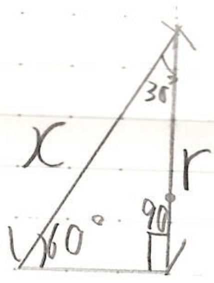

図5

求めたい三角形は図5にしめすとおりなので図4と図5を比較すると、

$2 : \sqrt{3} = x : r$ となる。

$\sqrt{3}x = 2r$

$x = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}2r = 2\frac{\sqrt{3}}{3}r$　$2\frac{\sqrt{3}}{3}r$ となる。

つまり外周G＝6xなので

$G = \cancel{6}^{2} \times 2\frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}_{1}}r = 4\sqrt{3}r$

そこで(4)の式の左辺に書き換えると

$C/D = 4\sqrt{3}r/2r = \frac{{}^{2}\cancel{4}\sqrt{3}\cancel{r}}{{}_{1}\cancel{2}\cancel{r}} = 2\sqrt{3}$ …(5)となる。

(2)とまとめると　$3 < \pi < 2\sqrt{3}$ …(A)　となる。

$2\sqrt{3}=3.4641016\cdots$ という値。円周率を2つの値の間に挟み込むというのはこのような状態を表す。このようにして円周率πが値の間にあることをはっきり示した。この後アルキメデスは辺の次々に2等分して行き、正12角形、正24角形…と続け、正96角形まで計算して

$223/71(=3.140845\cdots)<\pi<22/7(=3.142857\cdots)$ (13)
式(13)　　を出した。

2.感想
アルキメデスのπの出し方がむずかしかったので、何回もこの方法をやりなおした。紀元前の人がよくπが3.14と確定していてすごいなと思いました。

3.関連する事項
ピタゴラスの定理についてわからなかったので調べてみました。

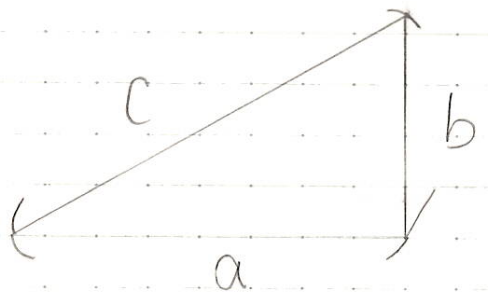

図1 直角形

上の直角三角形において、

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立つ。
ピタゴラスの定理を使うと、直角三角形の2つの辺の

長さからもう一つの長さを求めることができる。

ピタゴラスの定理を使うと、三角じょうぎにも使われている45°、45°、90°の直角二等辺三角形と30°、60°、90°の直角三角形の比を求めることができる。

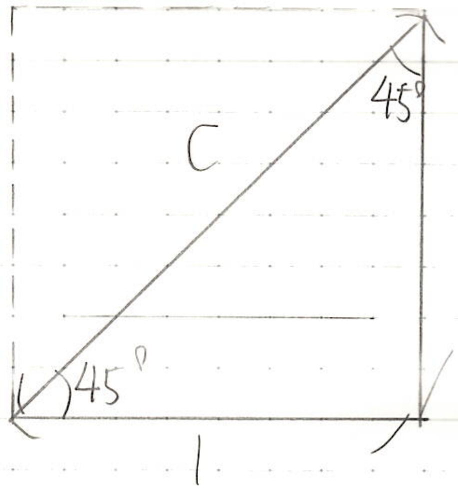

図2

まずは、45°、45°、90°の直角二等辺三角形の比を求める。この三角形は、正方形をひとつの対角形で分割してできているものなので、斜辺でない2つの辺の長さはともに同じ長さ。この長さを1とする。すると、もう一つの辺(斜辺)の長さ(これをCとする)は、ピタゴラスの定理から次のように求めることができる。

$$a^2+b^2=C^2$$
$$1^2+1^2=C^2$$
$$C^2=2 \qquad C=\sqrt{2}$$

となる。よって斜辺の長さは$\sqrt{2}$となった。

45°、45°、90°の直角二等辺三角形は$1:1:\sqrt{2}$になる。

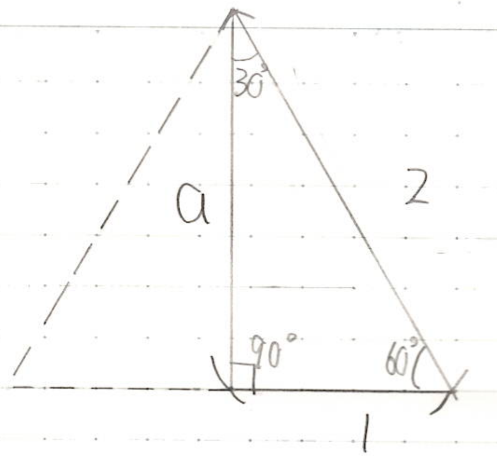

図3

次は30°、60°、90°の直角三角形の比を求める。この三角形は正三角形をそのひとつの角の二等分線で分割してできるものなので、正三角形の一辺の長さを2とする。頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分するので、直角三角形の60°と90°で挟まれる辺の長さは1。ここでピタゴラスの定理を用いることで、正三角形にあたる長さ(これをaとする)を求めることができる。直角三角形でピタゴラスの定理を使うと

$$a^2+b^2=c^2$$
$$a^2+1^2=2^2$$
$$a^2=3 \qquad a=\sqrt{3}$$

となる。よって正三角形の高さに当たる辺の長さは$\sqrt{3}$となった。

30°、60°、90°の直角三角形は$1:2:\sqrt{3}$になる。

4.参考文献

三平方の定理の証明と使い方 Sci-pursuit.com

埼玉大学科学者の芽育成プログラムに参加し、中村滋先生に教わりました。